Web page: www.ma8eno.gr
e-mail: vrentzou@ma8eno.gr

Η αποτελεσματική μάθηση δεν θέλει κόπο…αλλά τρόπο, δηλαδή ma8eno.gr

Τυπολόγιο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

Σύνολα αριθμών

N : {Φυσικοί αριθμοί = {1, 2, 3, 4. . .}

Z : {Ακέραιοι = { . . . . -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, . . . }

Q : {Ρητοί αριθμοί} = {χ : χ= $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου τά α καί β είναι ακέραιο αριθμοί και β≠ 0}

Q': { Αρρητοι αριθμοί }
"Αρρητοι αριθμοί καλούνται οί δεκαδικοί αριθμοί μέ άπειρα δεκαδικά ψηφία τά οποία δέν επαναλαμβάνονται περιοδικώς.

R : {Πραγματικοί αριθμοί}
Τό σύνολο τών πραγματικών αριθμών **R** περιλαμβάνει τά ύποσύνολα N, Z, **Q, Q'**

C : = {Μιγαδικοί αριθμοί}

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που καθορίζονται με απόλυτη σαφήνεια και διακρίνονται το ένα από το άλλο.
Ίσα ονομάζονται δύο σύνολα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
Ένα σύνολο Α ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β και συμβολίζεται $A \subseteq B$.
Κενό σύνολο Ø ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο.
Ένωση $A \cup B$ δύο συνόλων ***Α, Β*** ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων.
Τομή $A \cap B$ δύο συνόλων ***Α, Β*** ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά στοιχεία και των δύο συνόλων .
Συμπλήρωμα ενός συνόλου ***Α*** ως προς ένα βασικό σύνολο ***Ω*** ονομάζεται το σύνολό που έχει όλα τα στοιχεία του ***Ω*** που δεν ανήκουν στο ***Α*** και συμβολίζεται με ***Α΄***.

Εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Δυνάμεις – Ρίζες

$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, α ≠ 0

$\alpha^\kappa \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\nu+\kappa}$

$\alpha^\kappa : \alpha^\nu = \alpha^{\kappa-\nu}$

$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha\beta)^\nu$

$(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\mu\nu}$

$\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$

$\left(\frac{\alpha^{-\nu}}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

$(\alpha\cdot\beta)^\nu = \alpha^\nu\cdot \beta^\nu$

$\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0, \quad \alpha \geq 0$

$\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha$

$\sqrt[\nu]{\alpha} \leq \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$

$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

$\sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha}$

$\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha|$

$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$

$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$

$\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}$

$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \beta > 0$

$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\mu]{\alpha} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\nu+\mu}}$

$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\mu-\nu}}$

$\sqrt[\rho\mu]{\alpha^{\rho\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$

$\frac{\alpha}{\alpha} = \alpha^{1-1} = \alpha^\circ = 1$ με α ≠ 0, $\alpha^1 = \alpha$

$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^\kappa} \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Δεν ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

Α Ν Α Λ Ο Γ Ι Ε Σ

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta} = \frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$

α	ν	**Ρίζες της $x^ν = α$**
α = 0	ν = 2κ ή ν = 2κ+1	Μία ρίζα: x = 0
α > 0	ν = 2κ	Δύο ρίζες αντίθετες: $x_1 = \sqrt[ν]{α}$, $x_2 = -\sqrt[ν]{α}$
	ν = 2κ+1	Μία ρίζα: $x = \sqrt[ν]{α}$
α < 0	ν = 2κ	Δεν υπάρχουν ρίζες, Α δ ύ ν α τ η στο ℝ
	ν = 2κ+1	Μία ρίζα: $x = -\sqrt[ν]{-α}$

Εξίσωση Α΄ Βαθμού

Η εξίσωση **αx+β=0** έχει	α≠0	μοναδική λύση $x = -\dfrac{β}{α}$	
	α=0	β≠0	Αδύνατη
		β=0	Αόριστη

Εξίσωση Β΄ Βαθμού

Η εξίσωση **αx²+βx+γ=0** με Δ=β²-4αγ έχει		
Δ>0 δύο ρίζες στο ϒ άνισες	Δ=0 μία διπλή ρίζα στο ϒ	Δ<0 καμία ρίζα στο ϒ, δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες
$x_{1,2} = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$	$x = \dfrac{-β}{2α}$	$z_{1,2} = \dfrac{-β \pm i\sqrt{\lvert Δ \rvert}}{2α}$

Άθροισμα και γινόμενο ριζών τριωνύμου

Η εξίσωση αx² + βx + γ = 0 με ρίζες x_1 και x_2 έχει	
άθροισμα ριζών $S = \dfrac{-β}{α}$	γινόμενο ριζών $P = \dfrac{γ}{α}$
Αν γνωρίζουμε το άθροισμα S και το γινόμενο P δύο αριθμών $ρ_1$ και $ρ_2$ τότε μία εξίσωση που έχει ρίζες τα $ρ_1$ και $ρ_2$ είναι:	
$x^2 - Sx + P = 0$	

Μορφές και πρόσημο τριωνύμου
$f(x) = αx^2 + βx + γ$

$$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{α \pm β}{α \mp β} = \frac{γ \pm δ}{γ \mp δ}$$

$$\frac{α_1}{β_1} = \frac{α_2}{β_2} = \cdots = \frac{α_ν}{β_ν} = \frac{α_1 \pm α_2 \pm \cdots \pm α_ν}{β_1 \pm β_2 \pm \cdots \pm β_ν}$$

$$\frac{α_1}{β_1} = \frac{α_2}{β_2} = \cdots = \frac{α_ν}{β_ν} = \frac{λ_1 \cdot α_1 \pm λ_2 \cdot α_2 \pm \cdots \pm λ_ν \cdot α_ν}{λ_1 \cdot β_1 \pm λ_2 \cdot β_2 \pm \cdots \pm λ_ν \cdot β_ν}$$

Κανόνας των πρόσημων:

$(+) \cdot (+) = +$

$(-) \cdot (-) = +$

$(+) \cdot (-) = -$

$(-) \cdot (+) = -$

Ισότητα δυνάμεων

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,ν,μ με α ≠ 0 και α ≠ ±1,ισχύει η συνεπαγωγή: $\boldsymbol{α^ν = α^μ \Rightarrow ν = μ}$

Βασικές ταυτότητες

1. $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2 \Leftrightarrow α^2 + β^2 = (α+β)^2 - 2αβ$

2. $(α-β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2 \Leftrightarrow α^2 + β^2 = (α-β)^2 + 2αβ$

3. $α^2 - β^2 = (α-β)(α+β)$

4. $(α+β+γ)^2 =$

$α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ + 2βγ + 2γα$

5. $(α-β-γ)^2 = α^2 + β^2 + γ^2 - 2αβ + 2βγ - 2γα$

$α^3 + β^3 = (α+β)^3 - 3αβ(α+β)$

6. $(α+β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3$

7. $α^3 + β^3 = (α+β)(α^2 - αβ + β^2)$

8. $α^3 - β^3 = (α-β)^3 + 3αβ(α-β)$

9. $(α-β)^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3$

10. $(α+β)^4 = α^4 + 4α^3β + 6α^2β^2 + 4αβ^3 + β^4$

11. $(α-β)^5 = α^5 - 5α^4β + 10α^3β^2 - 10α^2β^3 + 5αβ^4 - β^5$

10. $α^3 + β^3 + γ^3 - 3αβγ =$

$$\frac{1}{2}(α+β+γ)[(α-β)^2 + (β-γ)^2 + (γ-α)^2]$$

Αν : α + β + γ = 0 ή α = β = γ τότε

$α^3 + β^3 + γ^3 - 3αβγ = 0$

$(α+β)(α^{ν-1} - α^{ν-2}β + α^{ν-3}β^2 - \ldots - αβ^{ν-2} + β^{ν-1})$, ν: περιττός

11. $α^ν + β^ν =$

$\Delta > 0$, $f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α	

Δεν παραγοντοποιείται αν ν: άρτιος

$(\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$, ν: περιττός

12. $\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} =$

$(\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$, ν: άρτιος

$(\alpha + \beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 - \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} - \beta^{\nu-1})$, ν: άρτιος

12. $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2$

$\Delta = 0$, $f(x) = \alpha(x - \rho)^2$

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
f(x)	*Ομόσημο του α*	*Ομόσημο του α*	

$\Delta < 0$, Το f(x) **Δεν παραγοντοποιείται**

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	*Ομόσημο του α*	

Διτετράγωνη Εξίσωση

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x^2 + \gamma = 0$

ονομάζεται διτετράγωνη και λύνεται με την αντικατάσταση $y = x^2$, με την οποία γίνεται απλό τριώνυμο ως προς y με ρίζες έστω y_1 και y_2. Οι ρίζες της αρχικής είναι είναι:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1} \quad \text{και} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$$

Παραμετρική εξίσωση ονομάζεται κάθε εξίσωση, που οι συντελεστές των αγνώστων ή ο σταθερός όρος εκφράζονται με την βοήθεια γραμμάτων και όχι συγκεκριμένων αριθμών.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες είναι $\alpha \neq 0$. Για τις τιμές αυτές η εξίσωση έχει **μοναδική λύση.**
- Βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες είναι $\alpha = 0$ **και** $\beta \neq 0$. Για τις τιμές αυτές η εξίσωση είναι **αδύνατη.**
- Βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες είναι $\alpha = 0$ **και** $\beta = 0$. Για τις τιμές αυτές η εξίσωση είναι **ταυτότητα.**

Σύγκριση δύο πραγματικών αριθμών

Έστω α και β δύο πραγματικοί αριθμοί τότε:

- Λέμε ότι ο α είναι μεγαλύτερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha > \beta$, όταν $\alpha - \beta > 0$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Πείραμα τύχης ονομάζεται κάθε πείραμα που όσες φορές και αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του με απόλυτη βεβαιότητα.
Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.
Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
Βέβαιο ενδεχόμενο σε ένα πείραμα τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος.
Αδύνατο ενδεχόμενο σε ένα πείραμα τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος.
Δύο ενδεχόμενα ***A και B*** ενός πειράματος τύχης ονομάζονται **ασυμβίβαστα** όταν $A \cap B = \emptyset$.
Ίσα ενδεχόμενα $A = B$ Όταν πραγματοποιείται το A πραγματοποιείται και το B και αντιστρόφως.
Ονομάζεται **συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου Α το ενδεχόμενο Α΄ που πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.
Διαφορά $A - B$ ή AB' Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B.
Συμμετρική διαφορά
$AB' \cup A'B$ Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B.
$(A \cup B)'$ Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιούνται ούτε το A ούτε το B.
$(AB)'$ Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A, B.

Βασικές Ιδιότητες των πράξεων μεταξύ ενδεχομένων

$A \cup \varphi = A$, $A\varphi = \varphi$
$A \cup A = A$, $AA = A$
$A \cup \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$
$A \cup A' = \Omega$, $(A')' = A$
Αν $A \subseteq B$ τότε $AB = A$ και $A \cup B = B$
$(A \cup B)' = A'B'$, $(AB)' = A' \cup B'$

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας *(Laplace, 1812)*
Αν ο Ω είναι πεπερασμένος και όλα τα απλά ενδεχόμενά του είναι

❖ Λέμε ότι ο α είναι μικρότερος του β και το συμβολίζουμε
$\alpha < \beta$, όταν $\alpha - \beta < 0$

❖ Λέμε ότι ο α είναι ίσος με τον β και το συμβολίζουμε $\alpha = \beta$, όταν $\alpha - \beta = 0$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

1ου βαθμού ανίσωση

Ισχύει $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$

Για οποιοδήποτε ζεύγος πραγματικών ισχύει μία από τις τρεις σχέσεις: $\alpha>\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$

Ισχύουν $\alpha>0$ και $\beta>0 \Rightarrow \alpha+\beta>0$ και $\alpha<0$ και $\beta<0 \Rightarrow \alpha+\beta<0$

α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta > 0$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > 0$

α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta < 0$ ή $\frac{\alpha}{\beta} < 0$

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$

$\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$ μεταβατική ιδιότητα

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\gamma > \beta\gamma, & \text{αν } \gamma > 0 \\ \alpha\gamma < \beta\gamma, & \text{αν } \gamma < 0 \end{cases}$$

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}, & \text{αν } \gamma > 0 \\ \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}, & \text{αν } \gamma < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha>\beta \\ \gamma>\delta \end{matrix}\right| \Rightarrow \alpha+\gamma>\beta+\delta$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha>\beta \\ \gamma>\delta \end{matrix}\right| \Rightarrow \alpha\gamma>\beta\delta$$

(ισχύει αν α,β,γ,δ θετικοί)

*Ποτέ **δεν** αφαιρούμε ή διαιρούμε ανισότητες!*

$\alpha^{2\nu+1}>\beta^{2\nu+1} \Leftrightarrow \alpha>\beta$

$\alpha^{2\nu}>\beta^{2\nu} \Leftrightarrow |\alpha|>|\beta|$

αν $\alpha>\beta>0 \Rightarrow \alpha^{\nu}>\beta^{\nu}$

αν $\alpha>\beta>0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

αν $x>y>0$ και $\alpha>1$ τότε $\alpha^x>\alpha^y$

αν $x>y>0$ και $\alpha<1$ τότε $\alpha^x<\alpha^y$

ισοπίθανα, τότε :

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = \mathbf{1}$

Σ' ένα πείραμα τύχης

$P(A) + P(A') = 1$

$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας *(Kolmogorov, 1933)*

1. $P(A) \geq 0$, $\forall$ενδεχόμενο A του Ω.
2. $P(\Omega) = 1$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα A, B $P(AB) = P(A)P(B)$.

Όταν $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ και A, B ανεξάρτητα τότε $P(A / B) = P(A)$ και $P(B / A) = P(B)$

Εξαρτημένα ενδεχόμενα A,B $P(AB) \neq P(A)P(B)$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα A,B, Γ

$P(AB) = P(A)P(B)$, $P(A\Gamma) = P(A)P(\Gamma)$

$P(B\Gamma) = P(B)P(\Gamma)$ και $P(AB\Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$

Ανεξαρτησία και συμπληρωματικά ενδεχόμενα

Αν A, B ανεξάρτητα τότε είναι ανεξάρτητα και τα ζεύγη $\{A, B'\}$, $\{A', B\}$, $\{A', B'\}$

Σχέσεις μεταξύ ανεξάρτητων και ξένων ενδεχομένων

Αν A, B **ξένα** (με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$) τότε: $P(A / B) = 0 \neq P(A)$

και συνεπώς τα A, B είναι **εξαρτημένα**.

Αν A, B **ξένα** τότε: $P(AB) = 0$ και $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Αν A, B **ανεξάρτητα** τότε: $P(AB) = P(A)P(B)$ και $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

ΠΡΟΟΔΟΙ

Αριθμητική	Γεωμετρική
$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, $\omega=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αν και μόνο αν $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ $S_\nu=\frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\nu$	$\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$, $\lambda=\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αν και μόνο αν $\beta^2=\alpha\gamma$ $S_\nu=\alpha_1\frac{1-\lambda^\nu}{1-\lambda}$, $S_\infty=\alpha_1\frac{1}{1-\lambda}$ για $\lvert\lambda\rvert<1$

Απόσταση σημείων

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία τότε η απόστασή τους είναι

$d_{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

αν α>β>0 και ν ∈ ∞ τότε ισχύουν:

$\alpha^{\nu}>\beta^{\nu}$

$\sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$

αν α>β>0 και n θετικός ρητός τότε:

$\alpha^{n}>\beta^{n}$

$\alpha^{-n}<\beta^{-n}$

2ου βαθμού ανίσωση $\alpha x^2+\beta x\ \gamma>0$, $\alpha,\beta,\gamma \in IR$ και $\alpha \neq 0$

Για την λύση της ανισότητας αυτής στηριζόμαστε στη θεωρία που αναφέρεται στο πρόσημο του τριωνύμου. Όταν στις ανισώσεις $\alpha\chi+\beta > 0$, $\alpha\chi+\beta < 0$ τα α,β δεν είναι συγκεκριμένοι αριθμοί τότε οι ανισώσεις αυτές ονομάζονται **παραμετρικές.** Η διαδικασία προσδιορισμού των λύσεων μιας παραμετρικής ανίσωσης ονομάζεται **διερεύνηση.**

Απόλυτη τιμή

Α. Ορισμός: $|x| = \begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

Β.Ιδιότητες

1. $|x|\geq 0, \quad \forall x\in IR$

2. $|x|=|-x|, \quad \forall x\in IR$

3. $-|x|\leq x\leq |x|, \quad \forall x\in IR$

4. $|x^{2\nu}|=|x|^{2\nu} = x^{2\nu}, \quad x\in IR, \quad \nu\in \mathrm{N}$

5. $|x|=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\alpha, \alpha\nu\ \alpha\geq 0 \\ A\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta, \alpha\nu\ \alpha<0 \end{cases}$

6. $|x|\leq\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha\leq x\leq \alpha, \alpha\nu\ \alpha>0 \\ 0, \alpha\nu\ \alpha=0 \\ A\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta, \alpha\nu\ \alpha<0 \end{cases}$

7. $|x|>\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\alpha\ \acute{\eta}\ x>\alpha, \alpha\nu\ \alpha>0 \\ x\in IR^{*}, \alpha\nu\ \alpha=0 \\ x\in IR, \alpha\nu\ \alpha<0 \end{cases}$

8. $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|, \quad (\tau\acute{o} = \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ \alpha\beta\geq 0)$

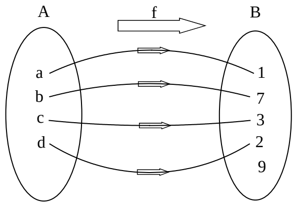
9. $|\alpha-\beta|\leq|\alpha|+|\beta|, \quad (\tau\acute{o} = \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ \alpha\beta\leq 0)$

10. $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu|\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_\nu|, \quad \nu\in \mathrm{IN}^{*}$

11. $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$

Συνάρτηση

Κάθε διαδικασία αντιστοίχησης η οποία αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο του συνόλου A ένα μόνο στοιχείο του B λέγεται συνάρτηση.
Σχηματικά η κατάσταση έχει ως εξής.



Μεθοδολογία - Μελέτη συναρτήσεων

Η διαδικασία που ακολουθείται για τη μελέτη κάθε συνάρτησης είναι:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της.
- Αναζητούμε συμμετρίες.
- Εξετάζουμε τη μονοτονία της.
- Αναζητούμε ακρότατα.
- Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της f(x) για απολύτως μεγάλες τιμές του x. Κάνουμε πίνακα τιμών και σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση.
- Εφαρμογές μελέτης συναρτήσεων.

Η συνάρτηση f(x) = αx + β, α≠0, β≠0

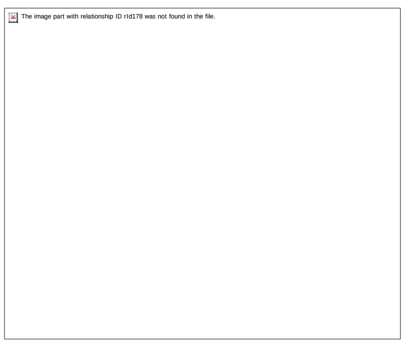
Γραφική παράσταση της f(x) = αx+β

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ) = αx+β είναι μια ευθεία, με εξίσωση y = αx+β η οποία:

α) Τέμνει τον άξονα y στο σημείο (0, β).

β) Τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $(-\frac{\beta}{\alpha}, 0)$, α≠0

γ) Σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία ω (κλίση της ευθείας), για την οποία ισχύει: εφω = α



Η α = εφω καθορίζει πλήρως τη διεύθυνση της ευθείας y = αx+β και για το λόγο αυτό λέγεται συντελεστής

12. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \beta \neq 0$

13. $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdots |\alpha_\nu|, \quad \nu \in \mathrm{IN}^*$

14. $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Εξισώσεις με απόλυτες τιμές του αγνώστου

Για τη λύση εξισώσεων με απόλυτα χρησιμοποιούμε τα εξής:
$|\chi| = \alpha$, $\alpha > 0 \iff \chi = \alpha$ ή $\chi = -\alpha$
$|\chi| = |\alpha| \iff \chi = \alpha$ ή $\chi = -\alpha$
$|\chi|^2 = \chi 2$
$|\chi| = \alpha$, $\alpha < 0$ είναι αδύνατη.

Στις ανισώσεις που περιέχουν απόλυτα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες:

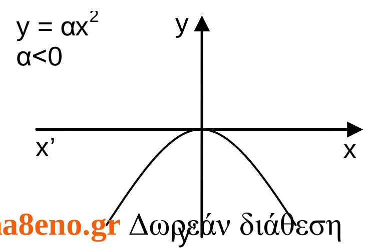
1. $|\chi| \leq \theta$, $\theta > 0 \iff -\theta \leq \chi \leq \theta$
2. $|\chi| \geq \theta$, $\theta > 0 \iff \chi \leq -\theta$ ή $\chi \geq \theta$
Αν $\theta < 0$: Η ανίσωση $|\chi| < \theta$ είναι αδύνατη (αφού $|\chi| \geq 0$)

Η ανίσωση $|\chi| > \theta$, ισχύει για κάθε $\chi \epsilon R$

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$

- Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x.
- Είναι άρτια συνάρτηση.
- Αν α>0, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο
  $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=0$.
- Αν α<0, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο
  $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=0$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ είναι παραβολή, με κορυφή το σημείο Ο (0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.



διεύθυνσης αυτής. Ισχύει:
α) Αν α>0, τότε $0^o < \omega < 90^o$.
β) Αν α<0, τότε $90^o < \omega < 180^o$.
γ) Αν α =0, τότε $\omega = 0^o$.
δ) Αν $\varepsilon \perp \chi΄\chi$ **δεν** ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης
Ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας από δύο σημεία της

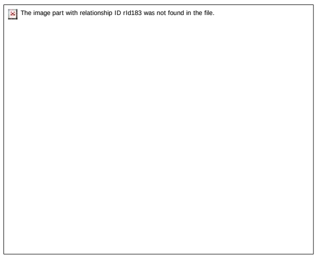
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ $\quad \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

- y = αx : Παριστάνει ευθεία που διέρχεται

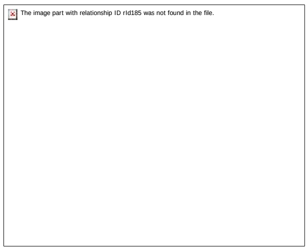
από την αρχή των αξόνων με συντελεστή

διεύθυνσης α.



- y = x : Παριστάνει την διχοτόμο της 1ης γωνία

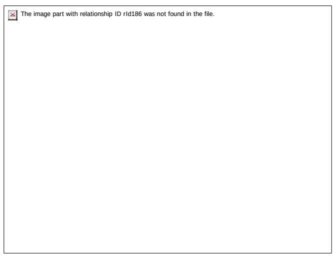
$(\alpha=1, \omega=45^0)$



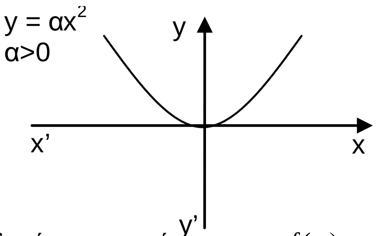
- y = β : Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον

χ΄χ που διέρχεται από το σημείο (0,β) του άξονα

y΄y $(\alpha = 0, \omega = 0^0)$



- y = -x : Παριστάνει την διχοτόμο της 2ης γωνίας



- Ειδικές περιπτώσεις της $f(x) = αx^2$, $α \neq 0$

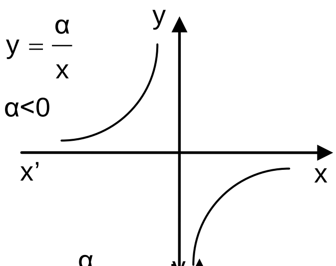
Αν $α=1>0$, τότε $f(x) = x^2$

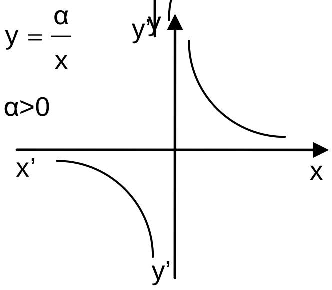
Αν $α=-1<0$, τότε $f(x) = -x^2$

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{α}{x}$, $α \neq 0$

- Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x, με $x \neq 0$.
- Είναι περιττή, δηλαδή η γραφική της παράσταση θα έχει το O(0,0) κέντρο συμμετρίας.
- Αν $α>0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.
- Αν $α<0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

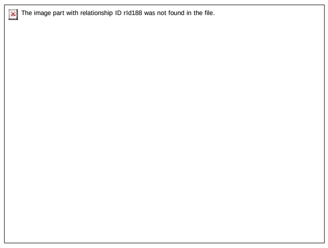
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{α}{x}$, $α \neq 0$ είναι ισοσκελής υπερβολή:





Αποτελείται από δύο κλάδους, που είναι συμμετρικοί ως προς το O. Έχει οριζόντιες

($α = -1$, $ω=135^0$)



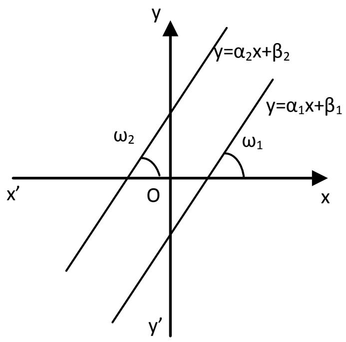
<u>Ευθείες παράλληλες - κάθετες</u>

Οι ευθείες $ε_1$: $y = α_1x+β_1$ και $ε_2$: $y = α_2x+β_2$ είναι:

I. Παράλληλες αν $α_1 = α_2$

Απόδειξη:

$ε_1 // ε_2 \Leftrightarrow ω_1 = ω_2 \Leftrightarrow εφω_1 = εφω_2 \Leftrightarrow α_1 = α_2$



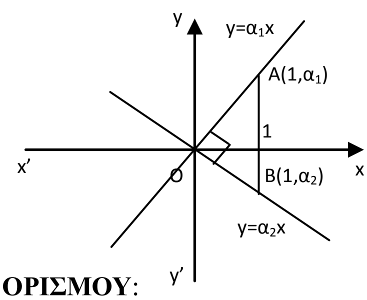
II. Κάθετες αν $α_1 \cdot α_2 = -1$

Απόδειξη:

Θεωρώ τις κάθετες ευθείες $y=α_1x$ και $y=α_2x$. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο άρα έχω: $(OA)^2+(OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow$

$α_1^2+1^2+α_2^2+1^2 = (α_1-α_2)^2+(1-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow α_1^2+1+α_2^2+1 = α_1^2+α_2^2-2α_1α_2 \Leftrightarrow 2 = -2α_1α_2 \Leftrightarrow α_1α_2 = -1$



ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:

A = ℝ (αφού το f(x) ορίζεται για κάθε x∈ □)

ασύμπτωτες τους ημιάξονες Ox, Ox΄ και κατακόρυφες ασύμπτωτες τους ημιάξονες Oy, Oy΄ .

Αν α>0, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x.

Αν α<0, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία y=-x.

- Ειδικές περιπτώσεις της $f(x)=\frac{\alpha}{x}$, α≠0:

Αν α=1>0, τότε $f(x)=\frac{1}{x}$

Αν α=-1<0, τότε $f(x)=-\frac{1}{x}$

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ:

- Αν $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ τότε $f(\mathbf{A}) = \mathbb{R}$

αφού για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ έχει λύση ως προς x στο π

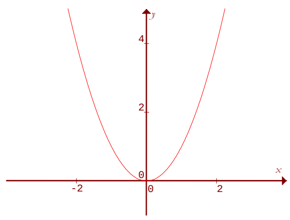
Αφού

$$y=\alpha x+\beta \iff \alpha x = y-\beta \iff x=\frac{y-\beta}{\alpha}$$

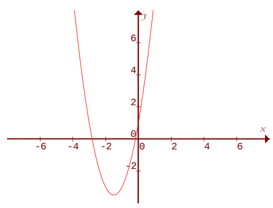
- Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$ τότε $f(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{\beta}\}$

(αφού η f έχει μοναδική τιμή $f(x)=y=\beta$)

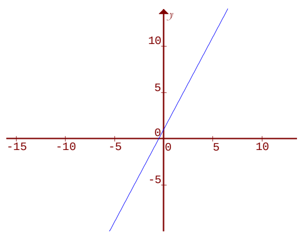
Μερικές χρήσιμες γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων



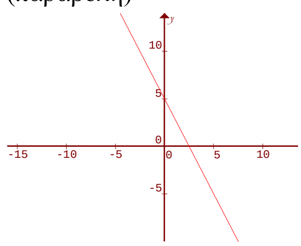
$f(x)=x^2$ (παραβολή)



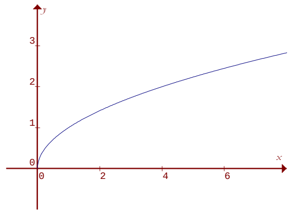
$f(x)=2x^2+6x+1$ (παραβολή)



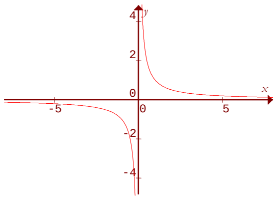
$f(x)=2x+1$ (γραμμική)



$f(x)=-2x+5$ (γραμμική)



$f(x)=\sqrt{x}$

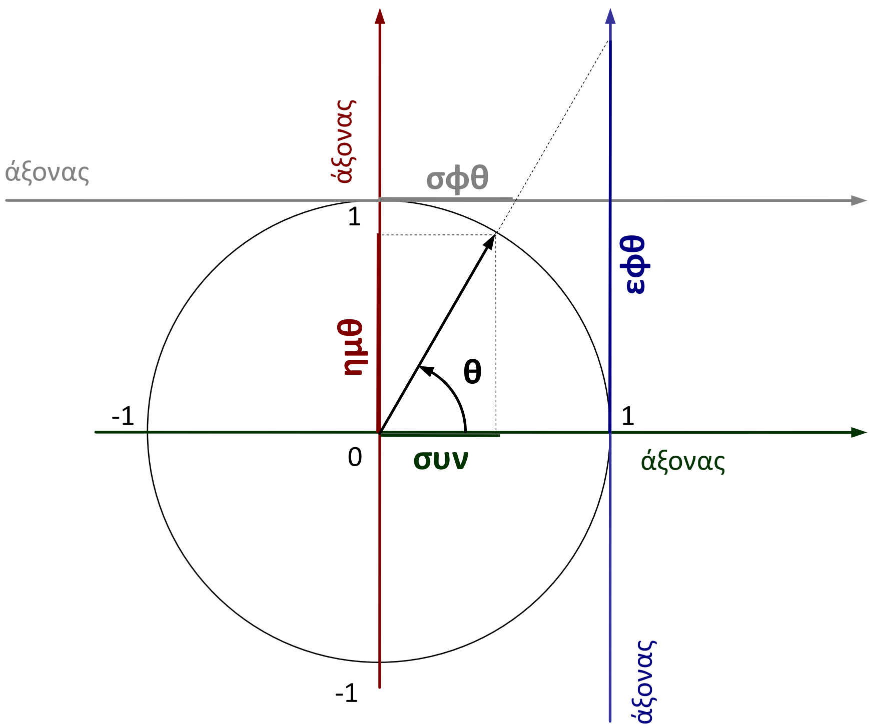


$f(x)=1/x$ (υπερβολή)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ορισμοί

Τριγωνομετρικός αριθμός		*Στα αγγλικά*		*Ορισμός*
ημίτονο	ημx	sinus	sinx	$\frac{\text{απέναντι κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}}$
συνημίτονο	συνx	cosines	cosx	$\frac{\text{προσκείμενη κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}}$
εφαπτομένη	εφx	tangent	tanx	$\frac{\text{απέναντι κάθετος}}{\text{προσκείμενη κάθετος}}$
συνεφαπτομένη	σφx	cotangent	cotx	$\frac{\text{προσκείμενη κάθετος}}{\text{απέναντι κάθετος}}$
τέμνουσα	τεμx	secant	secx	$\frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{προσκείμενη κάθετος}}$
συντέμνουσα	στεμx	cosecant	cscx	$\frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{απέναντι κάθετος}}$



Ο τριγωνομετρικός

Σημαντικές σχέσεις

$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$	$\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$	$\sigma\varphi\theta = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$
$\varepsilon\varphi\theta\sigma\varphi\theta=1$	$\tau\varepsilon\mu\theta=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$	$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta=\dfrac{1}{\eta\mu\theta}$

Περιοδικότητα	Γωνίες που διαφέρουν π	Γωνίες με άθροισμα π
$\eta\mu(2k\pi+\theta)=\eta\mu\theta$	$\eta\mu(\pi-\theta)=\eta\mu\theta$	$\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta$
$\sigma\upsilon\nu(2k\pi+\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta$	$\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$	$\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$
$\varepsilon\varphi(k\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$	$\varepsilon\varphi(\pi-\theta)=-\varepsilon\varphi\theta$	$\varepsilon\varphi(\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$
$\sigma\varphi(k\pi+\theta)=\sigma\varphi\theta$	$\sigma\varphi(\pi-\theta)=-\sigma\varphi\theta$	$\sigma\varphi(\pi+\theta)=\sigma\varphi\theta$

Γωνίες που διαφέρουν π/2	Γωνίες με άθροισμα π/2	Γωνίες αντίθετες
$\eta\mu(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta$	$\eta\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta$	$\eta\mu(-\theta)=-\eta\mu\theta$
$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\theta)=\eta\mu\theta$	$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\eta\mu\theta$	$\sigma\upsilon\nu(-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta$
$\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sigma\varphi\theta$	$\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sigma\varphi\theta$	$\varepsilon\varphi(-\theta)=-\varepsilon\varphi\theta$
		$\sigma\varphi(-\theta)=-\sigma\varphi\theta$

σφ($\frac{\pi}{2}$-θ)=εφθ	σφ($\frac{\pi}{2}$+θ)=-εφθ	

Τριγωνομετρικοί αριθμοί κυριότερων γωνιών

μοίρες	**0**	**15**	**18**	**30**	**45**	**60**	**72**	**75**	**90**	**180**	**270**	**360**
ακτίνια rad	**0**	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημθ	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	0	-1	0
συνθ	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	-1	0	1
Εφθ	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$2+\sqrt{3}$	+∞	0	-∞	0
σφθ	+∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$	$2-\sqrt{3}$	0	-∞	0	+∞

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

ημx=ημθ ⇔ x=2kπ+θ x=2kπ+π-θ	εφx=εφθ ⇔ x=kπ+θ
συνx=συνθ ⇔ x=2kπ±θ	σφx=σφθ ⇔ x=kπ+θ

Άθροισμα, διπλάσιο, τριπλάσιο, μισό τόξο

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος	Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιου τόξου	
ημ(α±β)=ημασυνβ±συναημβ συν(α±β)=συνασυνβ∓ημαημβ εφ(α±β)=$\frac{εφα \pm εφβ}{1 \mp εφαεφβ}$	ημ2α=2ημασυνα συν2α=συν^{2}α-ημ^{2}α =2συν^{2}α-1 =1-2ημ^{2}α	εφ2α=$\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$ σφ2α=$\frac{σφ^2α-1}{2σφα}$

σφ(α±β)= $\frac{σφασφβ \mp 1}{σφβ \pm σφα}$		

Τριγ. αριθμοί τριπλάσιου τόξου	Τριγ. αριθμοί μισού τόξου
ημ3α=3ημα-4ημ^{3}α συν3α=4συν^{3}α-3συνα εφ3α=$\frac{3εφα - εφ^3α}{1-3εφ^2α}$ σφ3α=$\frac{σφ^3α\text{-}3σφα}{3σφ^2α-1}$	$ημ\frac{α}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-συνα}{2}}$ $συν\frac{α}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+συνα}{2}}$ $εφ\frac{α}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-συνα}{1+συνα}}$ $σφ\frac{α}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+συνα}{1-συνα}}$

Τύποι αποτετραγωνισμού

ημ^{2}α=$\frac{1-συν2α}{2}$	εφ^{2}α=$\frac{1-συν2α}{1+συν2α}$
συν^{2}α=$\frac{1+συν2α}{2}$	σφ^{2}α=$\frac{1+συν2α}{1-συν2α}$

Βασικές ανισότητες

$-1 \le ημx \le 1$, $-1 \le συνx \le 1$, $-\infty \le εφx \le \infty$, $-\infty \le σφx \le \infty$,

Άθροισμα τριγωνομετρικών αριθμών

ημα+ημβ=2ημ$\frac{α+β}{2}$συν$\frac{α\text{-}β}{2}$ ημα-ημβ=2συν$\frac{α+β}{2}$ημ$\frac{α\text{-}β}{2}$	συνα+συνβ=2συν$\frac{α+β}{2}$συν$\frac{α\text{-}β}{2}$ συνα-συνβ=2ημ$\frac{α+β}{2}$ημ$\frac{α\text{-}β}{2}$
εφα+εφβ=$\frac{ημ(α+β)}{συνασυνβ}$ εφα-εφβ=$\frac{ημ(α-β)}{συνασυνβ}$	σφα+σφβ=$\frac{ημ(α+β)}{ημαημβ}$ σφα-σφβ=$\frac{ημ(α-β)}{ημαημβ}$

ημα και συνα συναρτήσει της εφ(α/2)

ημα και συνα σαν ρητές συναρτήσεις της εφ(α/2)	Γινόμενα (τύποι του Werner)

$ημα=\dfrac{2εφ\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}$ $συνα=\dfrac{1-εφ^2\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}$	$ημαημβ=\frac{1}{2}[συν(α-β)-συν(α+β)]$ $ημασυνβ=\frac{1}{2}[ημ(α+β)+ημ(α-β)]$ $συνασυνβ=\frac{1}{2}[συν(α+β)+συν(α-β)]$
$α\neq(2k+1)π,\ k\in\mathbb{Z}$	

Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

	-φ	*90±φ*	*180±φ*	*270±φ*	*360±φ* *2κπ±φ*
ημ	-ημφ	συνφ	μημφ	-συνφ	±ημφ
συν	συνφ	μημφ	-συνφ	±ημφ	συνφ
εφ	-εφφ	μσφφ	±εφφ	μσφφ	±εφφ
σφ	-σφφ	μεφφ	±σφφ	μεφφ	±σφφ
τεμ	τεμφ	μστεμφ	-τεμφ	±στεμφ	τεμφ
στεμ	-στεμφ	τεμφ	μστεμφ	-τεμφ	±στεμφ

Μετατροπές μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών

γνωστό ↓	ημx	συνx	εφx	σφx
ημx	ημx	$\pm\sqrt{1-ημ^2x}$	$\dfrac{ημx}{\pm\sqrt{1-ημ^2x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-ημ^2x}}{ημx}$
συνx	$\pm\sqrt{1-συν^2x}$	συνx	$\dfrac{\pm\sqrt{1-συν^2x}}{συνx}$	$\dfrac{συνx}{\pm\sqrt{1-συν^2x}}$
εφx	$\dfrac{εφx}{\pm\sqrt{1+εφ^2x}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+εφ^2x}}$	εφx	$\dfrac{1}{ημx}$
σφx	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+σφ^2x}}$	$\dfrac{σφx}{\pm\sqrt{1+σφ^2x}}$	$\dfrac{1}{σφx}$	σφx

Δυνάμεις ημιτόνου, συνημιτόνου

$ημ^2α=\frac{1}{2}(1-συν2α)$ $\qquad$ $συν^2α=\frac{1}{2}(1+συν2α)$

$ημ^3α=\frac{1}{4}(3ημα - ημ3α)$ $\quad$ $συν^3α=\frac{1}{4}(3συνα + συν3α)$

$ημα=\frac{1}{8}(συν4α – 4συν2α +3)$ $\quad$ $συνα=\frac{1}{8}(συν4α + 4συν2α +3)$

$ημα=\frac{1}{16}(10ημα – 5ημ3α + ημ5α)$ $\quad$ $συνα=\frac{1}{16}(10συνα + 5συν3α + συν5α)$

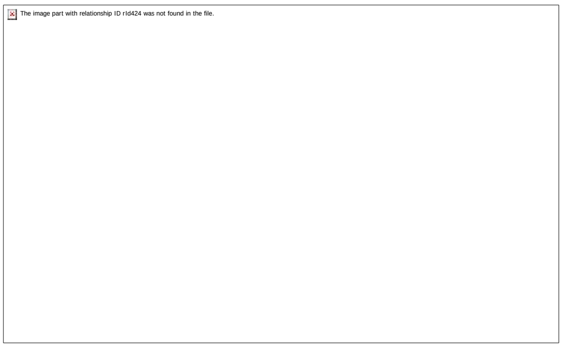
$ημ^6α=\frac{1}{32}(10 – 15συν2α + 6συν4α –συν6α)$ $\quad$ $συν^6α=\frac{1}{32}(10 + 15συν2α + 6συν4α –συν6α)$

Το άθροισμα ημιτόνου – συνημιτόνου ως ημίτονο

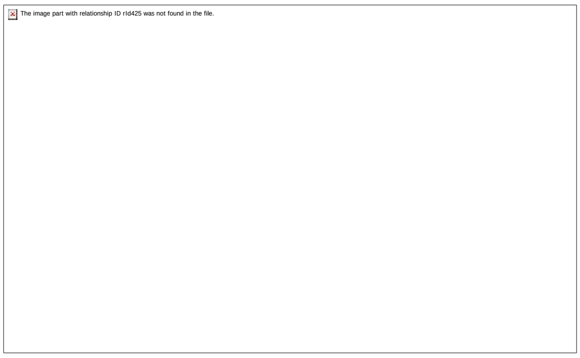
Για κάθε α, β≠0 η συνάρτηση (παράσταση) f(x)=αημx+βσυνx μπορεί να γραφεί στη μορφή f(x)=ρημ(x+φ) όπου:

$ρ=\sqrt{α^2+β^2}$ $\quad$ και $\quad$ $\begin{cases} ημφ=\frac{β}{ρ} \\ συνφ=\frac{α}{ρ} \end{cases}$ $\qquad$ Άρα max$f$=ρ και min$f$=-ρ

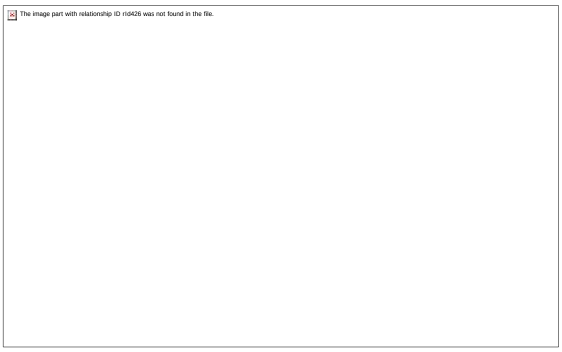
Γραφικές παραστάσεις



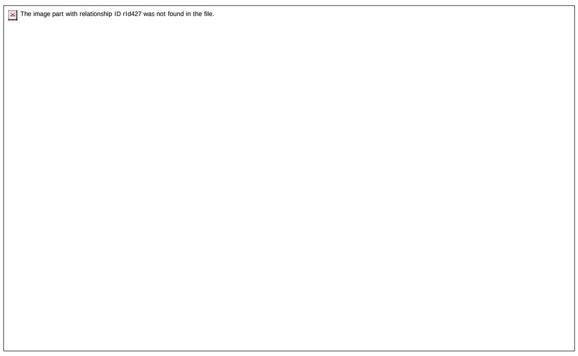
f(x)=εφx



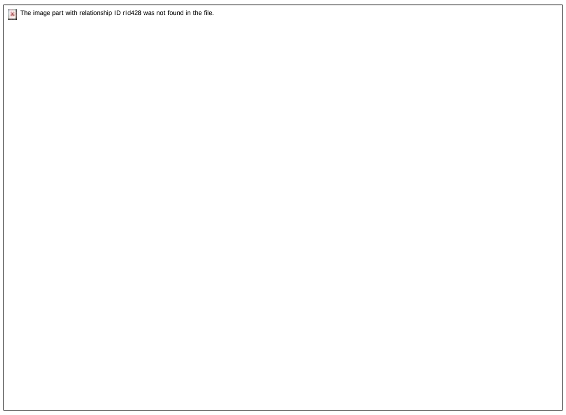
f(x)=σφx



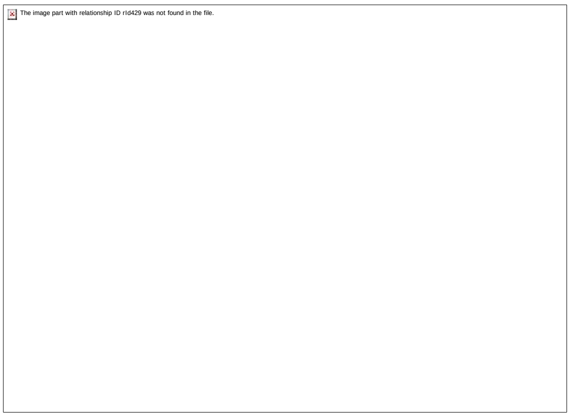
f(x)=ημx



f(x)=συνx



$f(x)=τεμx$



$f(x)=στεμx$