

1.Σύνολα

Σύνολο είναι μια ολότητα από σαφώς καθορισμένα και διακεκριμένα αντικείμενα. Τα φωνήεντα του ελληνικού αλφαβήτου θεωρούμενα ως μια ολότητα αποτελούν ένα σύνολο, το σύνολο των φωνηέντων του ελληνικού αλφαβήτου. Οποιαδήποτε ευθεία μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο των σημείων πού την αποτελούν. Τα αντικείμενα πού απαρτίζουν ένα σύνολο ονομάζονται μέλη ή στοιχεία του συνόλου. Η παράσταση ενός συνόλου γίνεται με δύο *άγκιστρα* {}, ανάμεσα στα όποια αναγράφουμε τα στοιχεία του συνόλου, π.χ. {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Η παράσταση ενός συνόλου μπορεί να γίνει και με άλλο τρόπο.

Έτσι το προηγούμενο σύνολο μπορεί να παρασταθεί: {X : χ φυσικός αριθμός μικρότερος από το 10} και διαβάζεται «το σύνολο των στοιχείων χ, όπου χ φυσικός αριθμός μικρότερος από το 10».

Ο παραπάνω συμβολισμός μερικές φορές γράφεται {χ | χ φυσικός αριθμός μικρότερος από το 10}. Το σύμβολο : ή το σύμβολο | διαβάζεται «όπου» και στις δύο περιπτώσεις, αλλά μόνο όταν βρίσκεται ανάμεσα, σε δύο μεταβλητές.

2. Υποσύνολα

Κάθε σύνολο έχει υποσύνολα. Υποσύνολο ενός συνόλου είναι ένα σύνολο πού αποτελείται από κανένα, από μερικά ή από όλα τα στοιχεία του συνόλου. Στα υποσύνολα ενός συνόλου X περιλαμβάνεται αυτό το ίδιο το σύνολο X και το κενό σύνολο. "Ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε το σύνολο

$X = \{\text{Νίκος, Σάββας, Μαρία, Ελένη}\}.$

Παραδείγματα υποσυνόλων του X είναι {Νίκος, Μαρία}, {Σάββας, Μαρία, Ελένη} και, βέβαια, { Νίκος , Σάββας , Μαρία, Ελένη }.

Χρησιμοποιούμε ένα κεφαλαίο γράμμα για να παριστάνουμε ένα σύνολο και χρησιμοποιούμε το σύμβολο \in πού σημαίνει «είναι στοιχείο (μέλος) του» ή «ανήκει».

Στο παραπάνω σύνολο, $\text{Ελένη} \in X$ καί διαβάζεται «ή Ελένη είναι μέλος του συνόλου X».

Κενό σύνολο είναι ένα σύνολο χωρίς στοιχεία και παριστάνεται με το σύμβολο \emptyset .

Τα υποσύνολα του $\{1,2,3\}$ είναι $0, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2, 3\}, \{1,2, 3\}$,

δηλ. 8 τον αριθμό. Το 8 είναι 2^3 και μπορεί να δημιουργηθεί ή απορία αν υπάρχει καμιά σημασία στο γεγονός ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι μια δύναμη του 2. Το ότι αυτό συμβαίνει πάντοτε μπορεί ναδειχτεί εύκολα.

Άς υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο με n στοιχεία. Τότε σε ένα υποσύνολο μπορούμε να δεχτούμε ή να απορρίψουμε οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου. Ο ολικός αριθμός των τρόπων με τούς όποιους μπορούμε να το κάνουμε αυτό είναι $2 \times 2 \times 2 \dots \times 2$ (n φορές), δηλ. 2^n . Επομένως υπάρχουν 2^n υποσύνολα για ένα σύνολο πού έχει n μέλη.

- Το N είναι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων. Γράψτε με σύμβολα αν οι ακόλουθοι αριθμοί είναι (ή δεν είναι) στοιχεία του N .
- (α) 5, (β) -4, (γ) $1 - 1$ (δ) \sqrt{x} (ε) 9. [Υπόδειξη. $5 \in N$.]
- Γράψτε όλα τα υποσύνολα του $\{1,3,5,7\}$. Πόσα υποσύνολα υπάρχουν;
- Γράψτε το σύνολο πού σχηματίζεται από τούς αρχικούς 7 πρώτους αριθμούς (περιλαμβάνοντας και τον 1). Πόσα υποσύνολα έχει το σύνολο αυτό;
- Βρείτε ποιοί από τούς αριθμούς 47,57,257,289 είναι στοιχεία του συνόλου των πρώτων αριθμών.

Σύνολα αριθμών

$\mathbf{N} := \{\text{Φυσικοί αριθμοί} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbf{Z} := \{\text{Ακέραιοι} = \{\dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$\mathbf{Q} := \{\text{Ρητοί αριθμοί}\} = \{\chi : \chi = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ όπου } \alpha \text{ και } \beta \text{ είναι ακέραιοι αριθμοί και } \beta \neq 0\}$

Τό σύνολο των ρητών αριθμών (**Q**) περιλαμβάνει τούς ακεραίους, τά κλάσματα μέ αριθμητή καί παρονομαστή ακεραίους καί τού δεκαδικούς αριθμούς μέ πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων τά όποια επαναλαμβάνονται περιοδικώς.

$\mathbf{Q}' := \{\text{Αρρητοι αριθμοί}\}$

"Αρρητοι αριθμοί καλούνται οί δεκαδικοί αριθμοί μέ άπειρα δεκαδικά ψηφία τά όποία δέν επαναλαμβάνονται περιοδικώς.

$\mathbf{R} := \{\text{Πραγματικοί αριθμοί}\}$

Τό σύνολο τών πραγματικών αριθμών **R** περιλαμβάνει τά ύποσύνολα **N**, **Z**, **Q**, **Q'**

$\mathbf{C} := \{\text{Μιγαδικοί αριθμοί}\}$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών

$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n\}$

χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- έχει μία αρχή: τον αριθμό 1,
- αν το n είναι ένα στοιχείο του συνόλου **N**, τότε και το $n + 1$ είναι στοιχείο του **N** (**ιδιότητα της διαδοχής**).

Η δεύτερη ιδιότητα συνεπάγεται ότι το σύνολο **N** έχει άπειρα στοιχεία. Με τα στοιχεία του συνόλου **N** κάνουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό και το άθροισμα ή το γινόμενο να είναι πάντα στοιχεία του **N**, δηλ. *το σύνολο **N** είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού*. Οι ανάγκες του πρώτου ανθρώπου ικανοποιούνταν με τους φυσικούς αριθμούς. 1 ποτάμι, 2 μήλα, 4 πουλιά. Το μηδέν δύσκολα το τοποθετείς στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Οι αρχαίοι Έλληνες που

το είχαν συνδέσει με το τίποτα, το απεχθάνονταν. Βέβαια το πόσο χρήσιμο είναι, φάνηκε από την ανάπτυξη που δέχθηκε η άλγεβρα από τους Άραβες οι οποίοι αγκάλιασαν και χρησιμοποίησαν το μηδέν σαν κανονικό αριθμό.

Προσθέτοντας σε κάθε αριθμό μια μονάδα, παίρνουμε τον αμέσως επόμενο.

Το **σύνολο των ακέραιων αριθμών** $Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ κερδίζει επιπλέον την ιδιότητα να είναι κλειστό στην πράξη της αφαίρεσης. Έτσι, στο σύνολο Z μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό και το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο να είναι πάλι στοιχεία του Z . Τον λείπει ωστόσο η διαίρεση.

Αν επεκτείνουμε το σύνολο Z έτσι ώστε να είναι δυνατόν να κάνουμε και διαιρέσεις μέσα σ' αυτό, δημιουργούμε το **σύνολο των ρητών αριθμών** Q .

Και οι τέσσερις πράξεις της αριθμητικής δίνουν αποτελέσματα μέσα το σύνολο Q , αλλά έχει χαθεί η ιδιότητα της διαδοχής.

Η επέκταση από το σύνολο των ρητών Q στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R αναπαρίσταται γεωμετρικά με μία ευθεία γραμμή. Το βασικό χαρακτηριστικό του συνόλου R είναι ότι περιέχει όλους τους αριθμούς που αντιστοιχούν στα γεωμετρικά σημεία που βρίσκονται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων της ευθείας. Η ιδιότητα αυτή του R , την οποία δεν έχουν τα υποσύνολα του N , Z και Q , ονομάζεται **πληρότητα**. Στην πραγματικότητα αυτό που εξασφαλίζει η ιδιότητα της πληρότητας είναι ότι δεν υπάρχουν «κενά» μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών.

3. Συμβολισμός

Το σύμβολο \subset σημαίνει «είναι υποσύνολο του», π.χ. $X \subset Y$ διαβάζεται «το X είναι υποσύνολο του Y ». Η προηγούμενη σχέση ισχύει όταν, και μόνον όταν, κάθε στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y . Ομοίως το σύμβολο \supset σημαίνει «περιέχει ως υποσύνολο». Π.χ. $Y \supset X$ διαβάζεται «το Y περιέχει το X ως υποσύνολο».

Οι δύο σχέσεις $X \subset Y$ και $Y \supset X$ είναι ίδιες και μπορούμε να γράψουμε:

$$X \subset Y \Leftrightarrow Y \supset X.$$

Αν, όμως, $X \subset Y$ και $Y \subset X$, τότε $X = Y$, επειδή κάθε στοιχείο του X είναι στοιχείο του Y και, αντίστροφα, κάθε στοιχείο του Y είναι στοιχείο του X και συνεπώς το X και το Y είναι το ίδιο σύνολο.

Π.χ Αν $X = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ και $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, $\Gamma = \{1, 3, 7\}$, ποιό από τα σύνολα A, B, Γ είναι υποσύνολο τον X ;

Προφανώς $B \subset X$ και $\Gamma \subset X$, γιατί κάθε στοιχείο του B και του Γ είναι στοιχείο του X , ενώ το A δεν είναι υποσύνολο του X , γιατί ένα στοιχείο του A (το 5) δεν είναι στοιχείο του X .

4. Διαγράμματα του Venn

Συχνά μας διευκολύνει να γράφουμε ένα ορθογώνιο γύρω από όλα τα στοιχεία που θεωρούμε και να το ονομάζουμε βασικό ή γενικό σύνολο E .

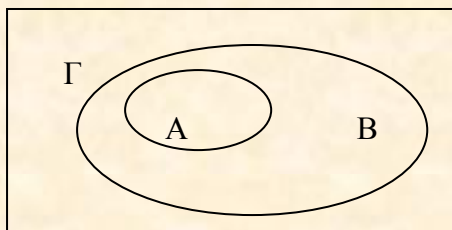
Ας υποθέσουμε, π.χ., ότι θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο των μαθητών του τμήματος A_2 είναι ένα υποσύνολο των παιδιών της A' τάξης σε ένα σχολείο, και ότι αυτό με τη σειρά του είναι ένα υποσύνολο του συνόλου όλων των μαθητών του σχολείου.

"Ας θέσουμε $A = \{ \chi \mid \chi \text{ μαθητής του τμήματος } A_2 \}$

$B = \{ \chi \mid \chi \text{ μαθητής της } A' \text{ τάξης} \}$

$\Gamma = \{ \chi \mid \chi \text{ μαθητής του σχολείου} \}$.

Τότε και στο διάγραμμα του Venn το Γ είναι το βασικό σύνολο.



5. Ισότητα συνόλων

Δύο σύνολα A και B είναι ίσα, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, ανεξάρτητα από τη σειρά που εμφανίζονται, οπότε γράφουμε:

$$A = B.$$

Παραδείγματα :

1. Τα σύνολα $A = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$ και $B = \{ \beta, \delta, \gamma, \alpha \}$ είναι ίσα.
2. Τα σύνολα

$X = \{x \mid x \text{ γράμμα της λέξης «ρίζα»}\}$ και $Y = \{y \mid y \text{ γράμμα της λέξης «ζάρι»}\}$

είναι ίσα, γιατί έχουν τα ίδια στοιχεία ρ, ι, ζ, α.

3. Τα σύνολα

$A = \{x \mid x \text{ ψηφίο του αριθμού } 1979\}$ και $B = \{1,7,9\}$ είναι ίσα, γιατί αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία.

Ιδιότητες

1. Κάθε σύνολο A είναι ίσο με τον εαυτό του, δηλαδή :

$A = A$ ανακλαστική ιδιότητα

2. Αν για τα σύνολα A, B ισχύει $A = B$, τότε και $B = A$, δηλαδή :

$A = B \Rightarrow B = A$ συμμετρική ιδιότητα

3. Αν για τα σύνολα A, B, Γ ισχύουν $A = B$ και $B = \Gamma$, τότε και $A = \Gamma$, δηλαδή : $A = B$ και $B = \Gamma \Rightarrow A = \Gamma$ μεταβατική ιδιότητα

6. Ιδιότητες της σχέσης εγκλεισμού

Το σύμβολο « \subset » ονομάζεται σύμβολο εγκλεισμού.

Από τον ορισμό του κενού συνόλου προκύπτει αμέσως ότι:

1. Το κενό σύνολο \emptyset είναι υποσύνολο κάθε συνόλου A , επομένως και τού εαυτού του, δηλαδή : $\emptyset \subset A$ και $\emptyset \subset \emptyset$.

Για τη σχέση εγκλεισμού ισχύουν οι έξης ιδιότητες :

2. Για κάθε σύνολο A ισχύει: $A \subset A$ ανακλαστική ιδιότητα

3. Αν για τα σύνολα A, B, Γ ισχύουν $A \subset B$ και $B \subset \Gamma$, τότε $A \subset \Gamma$, δηλαδή : $A \subset B$ και $B \subset \Gamma \Rightarrow A \subset \Gamma$ μεταβατική ιδιότητα

4. Αν για τα σύνολα A, B ισχύουν $A \subset B$ και $B \subset A$, τότε $A = B$, δηλαδή : $A \subset B$ και $B \subset A \Rightarrow A = B$ αντισυμμετρική ιδιότητα.

7. Τομή συνόλων

Στο σαλόνι ενός σπιτιού βρίσκονται ή Μητέρα, ο Πατέρας, ο Αντρέας, ο Νίκος, ή γάτα και το καναρίνι. Το γενικό σύνολο των έμψυχων πού βρίσκονται στο σαλόνι είναι:

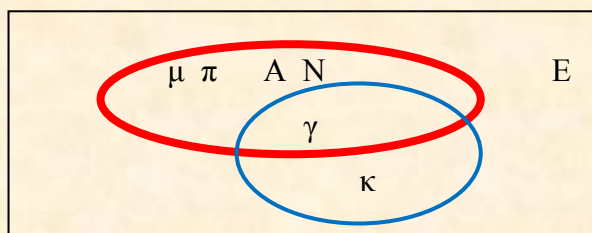
$E = \{ \text{Μητέρα, Πατέρας, Αντρέας, Νίκος, γάτα, καναρίνι} \}$. Το υποσύνολο αυτού των θηλαστικών Θ , είναι:

$\Theta = \{ \text{Μητέρα, Πατέρας, Αντρέας, Νίκος, γάτα} \}$, και το υποσύνολο των ζώων, Z , είναι:

$Z = \{ \text{γάτα, καναρίνι} \}$. Έτσι έχουμε $\text{γάτα} \in \Theta$ και $\text{γάτα} \in Z$

αλλά $Z \notin \Theta$ και $\Theta \notin Z$,

οπότε, αν και το Θ και το Z έχουν ένα μη κενό υποσύνολο κοινό, δηλαδή το σύνολο $\{ \text{γάτα} \}$, κανένα από τα σύνολα Z, Θ δεν είναι υποσύνολο του άλλου συνόλου.



Τα σύνολα Z και Θ λέμε ότι τέμνονται και το σύμβολο πού χρησιμοποιείται είναι τό \cap . "Έτσι έχουμε

$\Theta \cap Z = \{ \text{γάτα} \}$.

Αυτό διαβάζεται: *Η τομή του Θ και του Z είναι το σύνολο πού έχει ένα στοιχείο, τη γάτα.* Προφανώς το σύνολο $\{ \text{γάτα} \}$ είναι υποσύνολο του Θ και του Z .

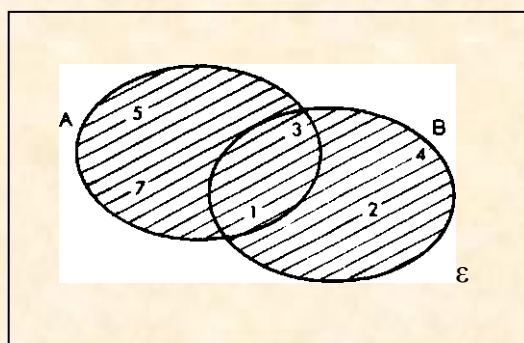
"Αν δύο υποσύνολα του E δεν έχουν κοινό στοιχείο, έχουμε $A \cap B = \emptyset$ (κενό σύνολο). Σε μια τέτοια περίπτωση τα σύνολα A και B ονομάζονται *ξένα μεταξύ τους*.

8. Ένωση συνόλου

Άς υποθέσουμε ότι έχουμε τα σύνολα $\{1,2\}$ και $\{1,3\}$. Καθένα τα σύνολα αυτά έχει δύο στοιχεία, αλλά στα δύο αυτά σύνολα εμφανίζονται μόνο τρία στοιχεία, οι αριθμοί 1, 2, 3. Το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ είναι ή εν των δύο προηγούμενων συνόλων.

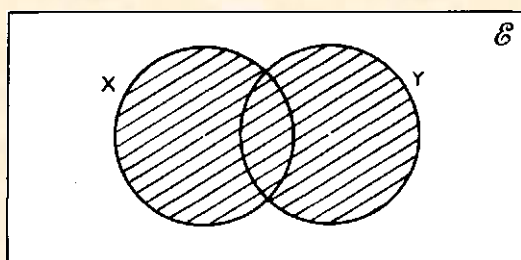
Αν αντιστρέψουμε το σύμβολο της τομής, έχουμε το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιείται για την ένωση δύο συνόλων. Έτσι το \cup διαβάζεται «ή ένωση του A και του B»

Αν πάρουμε τα σύνολα $A = \{1, 3, 5, 7\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4\}$, τότε $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$



Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τα στοιχεία των συνόλων A και B εμφανίζονται μόνο μία φορά στην ένωση, ακόμη και αν υπάρχουν και στα δύο σύνολα.

Ορισμός. Ένωση δύο συνόλων είναι τό σύνολο όλων των στοιχείων που παρουσιάζονται ή στο ένα σύνολο ή στο άλλο (δεν αποκλείεται κάποιο στοιχείο να ανήκει και στα δύο) και κάθε στοιχείο γράφεται μόνο μία φορά.



Παράδειγμα

$A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $\Gamma = \{5, 6, 7, 8\}$. Βρείτε (α) $A \cup (B \cap \Gamma)$, (β) $(A \cup B) \cap \Gamma$, (γ) $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$, (δ) $(A \cap \Gamma)(B \cap \Gamma)$.

(α) Πρώτα βρίσκουμε τό σύνολο $(B \cap \Gamma)$. "Έχουμε

$$B \cap \Gamma = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{6, 8\}.$$

Επομένως $A \cup (B \cap \Gamma) = \{1, 3, 5, 8\} \cup \{6, 8\}$
 $= \{1, 3, 5, 6, 8\}.$

(β) Προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω στο (α), βρίσκουμε το σύνολο πού είναι μέσα στην παρένθεση. Έτσι

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

οπότε $(A \cup B) \cap \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{5, 6, 8\}.$

Τα αποτελέσματα στις περιπτώσεις (α) και (β) δεν είναι ακριβώς τα ίδια, παρόλο πού οι θέσεις των συμβόλων A , B , Γ και των συμβόλων της τομής και της ένωσης είναι ίδιες. Αυτό σημαίνει ότι ή σειρά των πράξεων, δηλ. ή τοποθέτηση των παρενθέσεων είναι θεμελιώδους σημασίας.

(γ) "Έχουμε $A \cap \Gamma = \{1, 3, 5, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{5, 8\}$

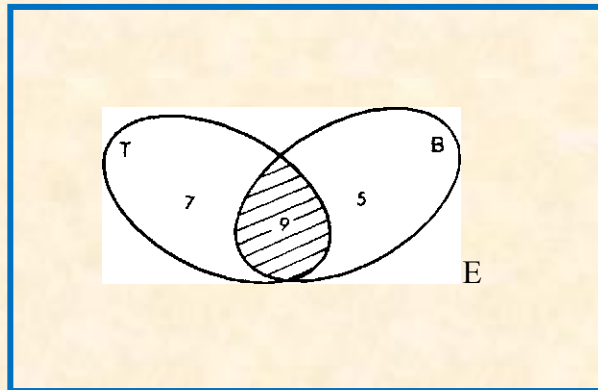
Και $B \cap \Gamma = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{6, 8\}.$

Επομένως $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma) = \{5, 8\} \cup \{6, 8\} = \{5, 6, 8\}$

(δ) Επίσης $(A \cap \Gamma) \cap (B \cap \Gamma) = \{5, 8\} \cap \{6, 8\} = \{8\}.$

Ένας σύλλογος έχει 24 μέλη, από τα οποία 16 παίζουν τένις, 14 παίζουν μπάσκετ και 9 παίζουν και τα δύο παιχνίδια. Πόσοι δεν παίζουν κανένα παιχνίδι;

Ο απλούστερος τρόπος είναι να φτιάξουμε ένα διάγραμμα του Venn. Επίσης εισάγουμε έναν απλό ορισμό, δηλ. ότι $n(A)$ είναι ό αριθμός των στοιχείων στο A .



Βάζουμε 9 στην τομή [δηλ. $n(T \cap B) = 9$], οπότε ο αριθμός των μελών του T που δεν υπάρχουν στο $T \cap B$ είναι 7 και ο αριθμός των μελών του B που δεν υπάρχουν στο $T \cap B$ είναι 5.

Επομένως $n(T \cup B) = 9 + 7 + 5 = 21$

(αυτός είναι ο αριθμός των μελών στην ένωση του T και του B).

Αλλά $n(E) = 24$, άρα $n(E) - n(T \cup B) = 24 - 21 = 3$.

Αυτός είναι ο αριθμός εκείνων που δεν παίζουν κανένα παιχνίδι.

