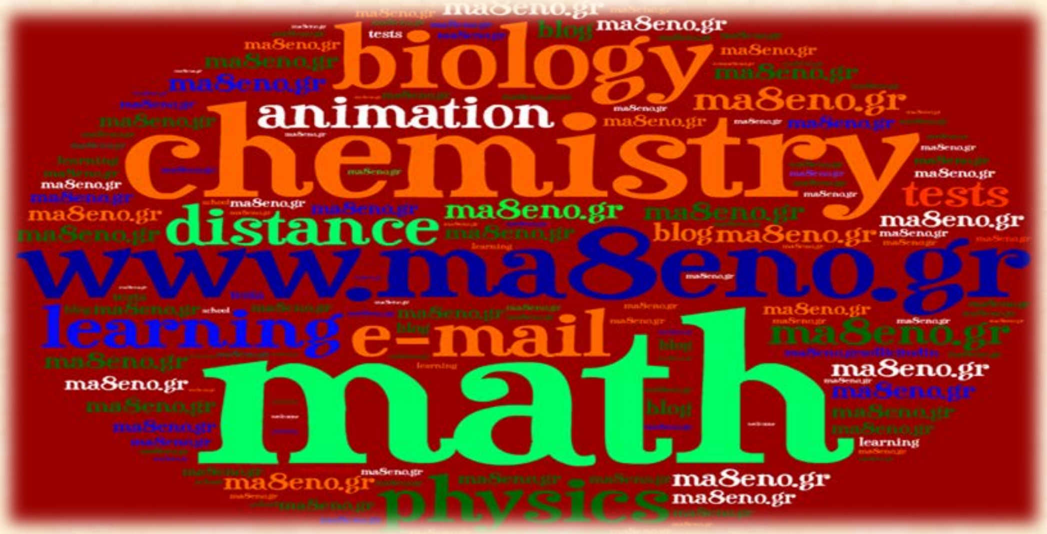


❖ **Ανισώσεις Α' Βαθμού -Εφαρμογές στις Ανισώσεις**

Ανίσωση με έναν άγνωστο ονομάζουμε κάθε ανισότητα που περιέχει μια μεταβλητή και η οποία αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής.

Πχ: Οι $3x + 3 > 7$, $2(y + 2) \leq 3y - 1$ είναι ανισώσεις με έναν άγνωστο.

- **Αν ισχύει $\alpha > 3$, να αποδείξετε ότι $-2(\alpha + 4) - 6 < -20$**

Λύση

Θα ξεκινήσουμε από την υπόθεση $\alpha > 3$, θα εφαρμόσουμε τις ιδιότητες της διάταξης και θα καταλήξουμε στη ζητούμενη ανισότητα: $-2(\alpha + 4) - 6 < -20$

1ος τρόπος απόδειξης ανισοτήτων

Ξεκινάμε από την υπόθεση και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της διάταξης, καταλήγουμε στην ανισότητα που ζητείται να αποδείξουμε.

Έχουμε:

$\alpha > 3$

$\alpha + 4 > 3 + 4$ Προσθέτουμε το 4 και στα δύο μέλη.

$\alpha + 4 > 7$

$-2 \cdot (\alpha + 4) < -2 \cdot 7$ Πολλαπλασιάζουμε με –2 και τα δύο μέλη. Αλλάζει η φορά της ανισότητας.

$-2(\alpha + 4) < -14$

$-2(\alpha + 4) - 6 < -14 - 16$ Αφαιρούμε το 6 και από τα δύο μέλη.

$-2(\alpha + 4) - 6 < -20$

- **Απόδειξη** **$\alpha - 3 < 3\alpha - 7$**

θα εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ανισοτήτων και θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε μια σχέση που ισχύει.

Έχουμε:

$\alpha - 3 > 3\alpha - 7$ Προσθέτουμε το 3 και στα δύο μέλη.

$\alpha - 3 + 3 > 3\alpha - 7 + 3$

$\alpha > 3\alpha - 4$

$\alpha - 3\alpha > 3\alpha - 4 - 3\alpha$ Αφαιρούμε τα 3α και από τα δύο μέλη.

$-2\alpha < -4$ Διαιρούμε με –2 και τα δύο μέλη.

$\alpha < 2$

Αλλάζει η φορά της ανισότητας.

Καταλήξαμε στην ανισότητα $\alpha < 2$, η οποία ισχύει από την υπόθεση.

- **Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει $x^2 + 4y^2 \geq 4xy$. Πότε ισχύει η ισότητα;**

Λύση

Ξεκινάμε από την ανισότητα:

$x^2 + 4y^2 \geq 4xy$ έχουμε:

$x^2 + 4y^2 - 4xy \geq 4xy \geq 4xy - 4xy$

$x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0$

Η τελευταία σχέση ισχύει, αφού το τετράγωνο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν.

$(x-2y)^2 \geq 0$

Η ισότητα $x^2 + 4y^2 \geq 4xy$ ισχύει όταν:

$(x-2y)^2 = 0$ ή $x - 2y = 0$ ή $x = 2y$

- **Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, να δείξετε ότι $\alpha - \delta < \beta - \gamma$.**

Λύση

$\gamma < \delta \Rightarrow -\delta < -\gamma$ **(1)**

αλλά $\alpha < \beta$ **(2)**

$(1) + (2) \Rightarrow \alpha - \delta < \beta - \gamma$.

- **Αν ισχύουν $x > 1$ και $y < 2$, να αποδείξετε ότι $xy + 2 < y + 2x$.**

Λύση

Από τη σχέση $x > 1$ προκύπτει ότι $x - 1 > 0$ (ή ότι $1 - x < 0$) και από τη σχέση $y < 2$ προκύπτει ότι $y - 2 < 0$ (ή ότι $2 - y > 0$).

$xy + 2 < y + 2x$ ή

$xy + 2 - y - 2x < 0$ μεταφέρουμε τους όρους στο 1ο μέλος

$xy - y + 2 - 2x < 0$ παραγοντοποιούμε

$y(x-1) - 2(x-1) < 0$

$(x-1)(y-2) < 0$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει:

$x - 1 > 0$ και $y - 2 < 0$,οπότε το γινόμενο τους είναι αρνητικό.

- **Αν $x > 3$, να αποδείξετε ότι: $x + 1 < 3x - 5 < 4x - 8$**

Λύση

Για να αποδείξουμε ότι:

$x + 1 < 3x - 5 < 4x - 8$

αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$x - 1 < 3x - 5$ και $3x - 5 < 4x - 8$

Για την πρώτη ανισότητα έχουμε:

$x - 1 < 3x - 5$ ή $x - 3x < -5 - 1$ ή $-2x < -6$ ή $x > 3$

Για τη δεύτερη ανισότητα έχουμε:

$3x - 5 < 4x - 8$ ή $3x - 4x < -8 + 5$ ή $-x < -3$, που ισχύει

Άρα ισχύει και η ζητούμενη διπλή ανισότητα.

- **Αν ισχύει $x < 2$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha = 2x - 3$ και $\beta = 3 - x$.**

Λύση

Θα βρούμε τη διαφορά $\alpha - \beta$ και θα προσδιορίσουμε το πρόσημό της.

Έχουμε:

$\alpha - \beta = (2x - 3) - (3 - x) =$

$= 2x - 3 - 3 + x =$

$= 3x - 6 = 3(x - 2)$

Όμως ισχύει $x < 2$, άρα $x - 2 < 0$ και $3(x - 2) < 0$. Δηλαδή ισχύει $\alpha - \beta < 0$, άρα $\alpha < \beta$.

- **Αν οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha > \beta$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > \beta^2$.**

Λύση

Γράφουμε την ανισότητα $\alpha > \beta$ δύο φορές και τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη:

$\begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha > \beta \end{cases}$, άρα $\alpha \cdot \alpha > \beta \cdot \beta$ ή $\alpha^2 > \beta^2$

Ισχύει ότι $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, οπότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις δύο ανισότητες.

- **α) Αν x > 0, να αποδείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$.**
- **β) Αν x < 0, να αποδείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \leq -2$.**

Η τελευταία ανισότητα ισχύει, διότι το τετράγωνο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο του μηδενός.

Λύση

α) Ξεκινάμε από την ανισότητα

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ που θέλουμε να αποδείξουμε. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με x > 0

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ ή $\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot x \geq 2 \cdot x$ ή $x^2 + \frac{1}{x} \cdot x \geq 2x$ ή $x^2+1 \geq 2x$ ή $x^2+1-2x \geq 0$ ή $(x-1)^2 \geq 0$

β) Ξεκινάμε από την ανισότητα $x + \frac{1}{x} \leq -2$ που θέλουμε να αποδείξουμε. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με x < 0, οπότε θα αλλάξει η φορά της ανισότητας:

$x + \frac{1}{x} \leq -2$ ή $\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot x \geq -2 \cdot x$ ή

$x^2 + \frac{1}{x} \cdot x \geq -2x$ ή $x^2+1 \geq -2x$ ή $x^2+1+2x \geq 0$ ή $(x+1)^2 \geq 0$

- **Αν ισχύει $-2 \leq x \leq 4$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:**

α) x + y **β) x – y**

Επειδή δεν επιτρέπεται να αφαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες, εργαζόμαστε ως εξής:

Λύση

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες:

$-2+1 \leq x + y \leq 4 + 2$ ή $-1 \leq x + y \leq 6$

β)

$1 \leq y \leq 2$ ή

$1 \cdot (-1) \geq y \cdot (-1) \geq 2 \cdot (-1)$ ή

$-1 \geq -y \geq -2$ ή $-2 \leq -y \leq -1$

προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες:

$2 + (-2) \leq x + (-y) \leq 4 + (-1)$ ή $-4 \leq x - y \leq 3$

- **Αν ισχύει ότι $2 \leq x \leq 4$ και $-5 \leq y \leq -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται το γινόμενο xy.**

Λύση

Δεν επιτρέπεται να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις ανισότητες $2 \leq x \leq 4$ και $-5 \leq y \leq -3$, γιατί στη δεύτερη ανισότητα όλα τα μέλη είναι αρνητικά.

$-5 \leq y \leq -3$ ή $-5(-1) \geq y(-1) \geq -3(-1)$ ή $5 \geq -y \geq 3$ ή $3 \leq -y \leq 5$

$2 \cdot 3 \; x\,(-y) \leq 4 \cdot 5$ πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισότητες

ή $6 \leq -xy \leq 20$ ή

$-6 \geq xy \geq -20$ ή

$-20 \leq xy \leq -6$

- **Αν ισχύει $x^2 + y^2 = 2y - 1$, να βρείτε τους αριθμούς x και y.**

Λύση

$x^2 + y^2 = 2y - 1$ μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ ή

$x^2 + (y-1)^2 = 0$

Όμως η τελευταία σχέση ισχύει μόνο

$x = 0$ και $y - 1 = 0$

$x = 0$ και $y = 1$

- **Αν $-2 \le x \le 1$ και $0 \le y \le 2$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Π = $2x - 3y + 1$.**

Λύση

$-2 \le x \le 1 \qquad -4 \le 2x \le 2$ **(1)**

$0 \le y \le 2 \qquad -3 \cdot 0 \ge -3y \ge -6 \quad \Rightarrow -6 \le -3y \le 0$ **(2)**

$(1) + (2) \quad \Rightarrow -10 \le 2x - 3y \le 2$

$-10 + 1 \le 2x - 3y + 1 \le 2 + 1$

$-9 \le 2x - 3y + 1 \le 3$

Άρα η μέγιστη τιμή της παράστασης Π είναι 3 και η ελάχιστη είναι –9

Λύνοντας ως προς x τις αx > β, αx < β, αx ≥ β, αx ≤ β

- Όταν α > 0, η φορά της ανίσωσης παραμένει
- Όταν α < 0, η φορά της ανίσωσης αντιστρέφεται
- Όταν α = 0, θέτουμε στην ανίσωση όπου α το 0.

- **Να λυθεί η ανίσωση**

$6 - 3(2\omega + 3) > 3 - 2(\omega - 2)$

Λύση

$6 - 3(2\omega + 3) > 3 - 2(\omega - 2)$ Πολλαπλασιασμοί

$6 - 6\omega - 9 > 3 - 2\omega + 4$

$-6\omega + 2\omega > 3 + 4 - 6 + 9$ Χωρισμός γνωστών από αγνώστους

$-4\omega > 10$ Αναγωγή όμοιων όρων)

$\frac{-4\omega}{-4} < \frac{10}{-4}$ Διαίρεση με συντελεστή αγνώστου

$\omega < \frac{10}{-4}$ Αλλαγή φοράς γιατί διαιρούμε με αρνητικό

- **Να λύστε την ανίσωση $x + 5 + 3(x - 1) > 4x + 7$**

Λύση

Η ανίσωση $x + 5 + 3(x - 1) > 4x + 7$ γράφεται διαδοχικά:

$x+ 5 + 3x -3 > 4x + 7$

$x + 3x - 4x >3 - 5 + 7$

$0x > 5$

- **Να λύστε την ανίσωση $3(x +2) - 2 (x -5) < 5(x + 2) - 4(x - 1)$**

Λύση

Η ανίσωση $3(x +2) - 2 (x -5) < 5(x + 2) - 4(x - 1)$ γράφεται διαδοχικά:

$3x+ 6-2x +10 < 5x + 10-4x+4$

$3x -2x - 5x +4x < -6-10+10+4$

$0x < -2$

Όταν μια ανίσωση είναι π.χ $0x < -2$ ή η $0y > 10$ δεν αληθεύει για καμία τιμή της μεταβλητής της και λέγεται αδύνατη.
Οι ανισώσεις $0.x > - 3$, $0.y < 7$ **αληθεύουν για κάθε τιμή** της μεταβλητής τους και λέγονται **ταυτότητες.**

Συναληθεύουσες ανισώσεις (Συστήματα ανισώσεων)

Για να βρούμε το διάστημα (ή τα διαστήματα) που συναληθεύουν (αν υπάρχουν) δύο ανισώσεις,τις λύουμε ξεχωριστά και μετά περνούμε τις λύσεις τους στο ίδιο σύστημα αξόνων από το οποίο βρίσκουμε το κοινό διάστημα λύσης τους (ή τα κοινά διαστήματα λύσης).

Παραδείγματα – Εφαρμογές

Να βρείτε που συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$2(x + 4) - (x + 6) < 12 - x$ και

$$2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \quad 2(1 + x)$$

Για την πρώτη ανίσωση έχουμε:

$$2(x + 4) - (x + 6) < 12 - x$$

$$2x + 8 - x - 6 < 12 - x$$

$$2x - x + x < 12 + 6 - 8$$

$$2x < 10$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{10}{2}$$

$$x < 5$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε:

$$2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \quad 2(1 + x)$$

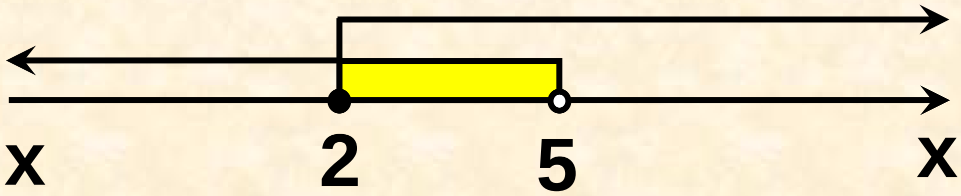
$$12x + x + 10 \geq 12(1 + x)$$

$$12x + x + 10 \geq 12 + 12x$$

$$x \geq 2.$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 2$

Κατασκευάζουμε άξονα και παριστάνουμε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:



Οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x με $2 \leq x \leq 5$,

δηλαδή οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x \in [2,5)$.

Κλασματικές ανισώσεις

Για να λύσουμε ανίσωση 1ου βαθμού κάνουμε:

α) απαλοιφή παρανομαστών

β) πράξεις

γ) χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

δ) αναγωγή ομοίων όρων

ε) κοινός παράγοντας ο άγνωστος

Έτσι φθάνουμε σε μία από τις μορφές $αx > β$, $αx < β$, $αx \geq β$, $αx \leq β$

Προσοχή στην απαλοιφή παρανομαστών:

Πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο του ΕΚΠ, διαφορετικά διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) ΕΚΠ > 0

β) ΕΚΠ < 0

γ) ΕΚΠ = 0

Παραδείγματα – Εφαρμογές

Να επιλύσετε την ανίσωση: $\frac{33}{10}-\frac{3(x+1)}{5}<4+\frac{2(x-3)+1}{10}$

Λύση:

$$\frac{33}{10}-\frac{3(x+1)}{5}<4+\frac{2(x-3)+1}{10}$$

$$\frac{33}{10}-\frac{3x+3}{5}<4+\frac{2x-6+1}{10}$$

$$\frac{33}{10}-\frac{3x+3}{5}<4+\frac{2x-5}{10}$$

$$10\cdot\frac{33}{10}-10\cdot\frac{3x+3}{5}<10\cdot4+10\cdot\frac{2x-5}{10}$$

$$33-2(3x+3)<40+(2x-5)$$

$$33-6x-6<40+2x-5$$

$$-6x-2x<40-5-33+6$$

$$-8x<-38+46$$

$$-8x<8$$

$$\frac{-8x}{-8}>\frac{8}{-8}$$

$$x>-1$$

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{4}<\frac{x}{6}$

Λύση

$\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{4}<\frac{x}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 6(x-1)+3(2x+3)<2x$

$6x-6+6x+9<2x$

$10x<-3 \quad \Leftrightarrow \quad x<-\frac{3}{10}$

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>x$

Λύση

$\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>x \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-12)+2x+3>4x$

$2x - 24 + 2x + 3 > 4x$

$0\,x > 21 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > 21$ αδύνατη

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$

Λύση

$\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5(x-2) + 2(1-2x) < x - 4$

$5x - 10 + 2 - 4x < x - 4$

$0x < 4$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

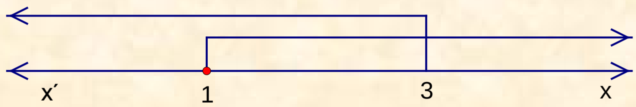
$3x - 1 < x + 5$ και $2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2}$

Λύση

$3x - 1 < x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$

$2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x \le 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \le -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 1$

Συναλήθευση $1 \le x < 3$



Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1$ και $x - \frac{1}{3} \le \frac{x}{3} - 1$

Λύση

$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 > x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3$

$x - \frac{1}{3} \le \frac{x}{3} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 1 \le x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \le -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -1$

Οι ανισώσεις δε συναληθεύουν

Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις :

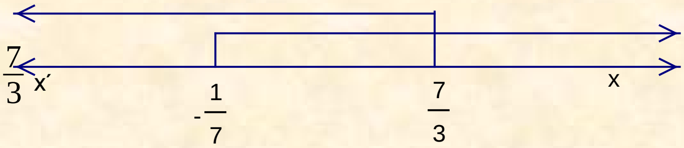
$2x - \frac{x-1}{8} > x$ και $x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0$

Λύση

$2x - \frac{x-1}{8} > x \Leftrightarrow 16x - x + 1 > 8x \Leftrightarrow 7x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7}$

$x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + x + 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$

Συναλήθευση $-\frac{1}{7} < x < \frac{7}{3}$



Οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $\left(-\frac{1}{7},\ \frac{7}{3}\right)$ είναι οι 0, 1, 2.