ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Βρέντζου Τίνα – Φυσικός – Μεταπτυχιακός τίτλος: «Σπουδές στην εκπαίδευση» MEd

Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Κεφάλαιο 1ο

Ενότητα 1η

Αλγεβρικές παραστάσεις

Σκοπός

Ο σκοπός της 1ης ενότητας είναι να υπενθυμίσει στον αναγνώστη τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων και τις βασικές ιδιότητες τους. Επιπλέον θα γίνει αναφορά στις ιδιότητες των δυνάμεων και των τετραγωνικών ριζών.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει την ενότητα αυτή, θα μπορείτε να:

- ***Να εκτελείτε τις τέσσερις πράξεις και να βρίσκετε αποτέλεσμα.***
- ***Να υπολογίζετε δυνάμεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες τους.***
- ***Να υπολογίζετε δυνάμεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες τους.***
- ***Να υπολογίζετε τετραγωνικές ρίζες χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες τους.***

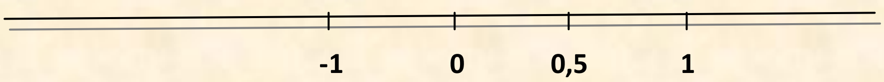
Έννοιες κλειδιά

Ρητός, άρρητος, πρόσθεση, αφαίρεση, διαίρεση, ιδιότητες, αντίθετοι, αντίστροφοι, δυνάμεις, ρίζες.

1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επανάληψη)

Το σύνολο των **πραγματικών** αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με IR, αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο του άξονα και αντίστροφα, κάθε σημείο του άξονα παριστάνει έναν πραγματικό αριθμό.

Αρνητικοί αριθμοί θετικοί αριθμοί



Σύνολα αριθμών

κατά σειρά επέκτασης	***φυσικοί · ακέραιοι · ρητοί · πραγματικοί · μιγαδικοί***
υποσύνολα φυσικών	***περιττοί · άρτιοι · πρώτοι · πρώτοι Μερσέν · τέλειοι · πυθαγόρειες τριάδες***
υποσύνολα πραγματικών	***άρρητοι · ασύμμετροι***
θεωρία συνόλων	***πληθάριθμοι · υπερπεπερασμένοι αριθμοί***
κατά βάση αρίθμησης	***δυαδικοί · τριαδικοί · επταδικοί · οχταδικοί · δεκαδικοί · δεκαεξαδικοί***
κατά σύστημα αρίθμησης	***αραβικοί · ινδικοί · ρωμαϊκοί · ελληνικοί · αρμενικοί***
μαθηματικές σταθερές	***π · φ · e · Googol***

Κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί ως κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$, μ, ν ακέραιοι και $\nu \neq 0$,

λέγεται **ρητός**.

Π.χ. οι αριθμοί 5 , -7 , 11,2 $\sqrt{\mathbf{16}} = 4$ $7,\overline{3}$ = 7,3333…3… είναι ρητοί. Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος** αριθμός.

Π.χ. οι αριθμοί $\sqrt{5}$, -7 δεν μπορούν να γραφούν ως πηλίκο δύο ακεραίων, οπότε είναι άρρητοι. Ο αριθμός π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, μη περιοδικά και δεν μπορεί να γραφεί ως πηλίκο δύο ακεραίων.

1.1 Πράξεις

Πρόσθεση: Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο, παράδειγμα:

(+5) + (+ 2) = +(5 + 2) = +7

(+3)+ (+7) = +(3+ 7) =+10= 10

(-8)+ (-3) = -(8 + 3) = -11

(-3) + (-5) = - (3 + 5) = - 8

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους πραγματικούς αριθμούς, βάζουμε το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη. Παράδειγμα:

(-5) + (+ 3) = -(5-3) = -2

(+ 2) + (-10) = -(10-2) = -8

Οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως, ως εξης:

Αφαίρεση:

Για να βρούμε τη διαφορά α - β δύο αριθμών προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, δηλαδή: α - β = α + (-β) .

Για παράδειγμα:

5 - (-4) = 5 + (+4) = + (5 + 4) = +9

-8 -(-12) = -8 + (+ 12) = +(12-8) = +4

Πολλαπλασιασμός:

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε πρόσημο (+). *Για* να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερώσημους πραγματικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε πρόσημο (-).

Για παράδειγμα:

(+2)·(+ 3) = +6,

(-2) (-10) = +20

(+0,5) (-15) = -7,5

Όμοια πρόσημα δίνουν +
Ανόμοια πρόσημα δίνουν -

Κανόνας των πρόσημων:

$$(+)\cdot(+) = +$$
$$(-)\cdot(-) = +$$
$$(+)\cdot(-) = -$$
$$(-)\cdot(+) = -$$

Ένα γινόμενο πολλών παραγόντων είναι:

- **θετικό, όταν το πλήθος των παραγόντων είναι θετικό ή όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο.**
- **αρνητικό, όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό.**

Η πράξη της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού ορίζονται για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, ενώ η διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

Διαίρεση

Για να βρούμε το πηλίκο α:β δύο αριθμών πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη, δηλαδή, αν β≠ 0,

τότε: $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

Για παράδειγμα:

$(+5) : (-3) = (+5)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}$

Θεμελιώδεις νόμοι των πράξεων

Α) Αντιμεταθετικός νόμος

Ισχύει $\begin{cases} \text{για την πρόσθεση} \quad \alpha+\beta=\beta+\alpha \\ \text{για τον πολλαπλασιασμό} \quad \alpha\beta=\beta\alpha \end{cases}$

Δεν ισχύει $\begin{cases} \text{για την αφαίρεση } \alpha-\beta\neq\beta-\alpha \\ \text{για την διαίρεση } \alpha:\beta\neq\beta:\alpha \end{cases}$

Β) Προσεταιριστικός νόμος

Ισχύει $\begin{cases} \text{για την πρόσθεση} \quad \alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \\ \text{για τον πολλαπλασιασμό} \quad \alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma \end{cases}$

Δεν ισχύει $\begin{cases} \text{για την αφαίρεση } (\alpha-\beta)+\gamma\neq\alpha-(\beta+\gamma) \\ \text{για την διαίρεση } \alpha:\beta:\gamma\neq\alpha:(\beta:\gamma) \end{cases}$

Γ) Επιμεριστικός νόμος

Ισχύει $\begin{cases} \text{για την πρόσθεση} \quad \text{ως προς τον πολλαπλασιασμό} \\ \\ \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \end{cases}$

Οι αριθμοί α και –α που έχουν άθροισμα 0 λέγονται αντίθετοι.

Οι αριθμοί α και $\frac{1}{\alpha}$ που έχουν γινόμενο τη μονάδα λέγονται αντίστροφοί αριθμοί.

Είναι: $\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0$

Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $(-1)\cdot\alpha = \alpha\cdot(-1) = -\alpha$

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

Αν $\alpha\cdot\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\gamma \neq 0$, τότε ισχύει:

Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma$

Αν $\alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma$ και $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha = \beta$

Προτεραιότητα των πράξεων

Αν σε μια παράσταση σημειώνονται προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, τότε προηγούνται οι διαιρέσεις και οι πολλαπλασιασμοί και ακολουθούν οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις.

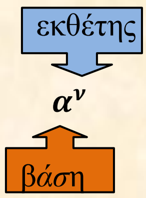
Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν: Αν $\alpha\cdot\beta <$ 0, τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ και αντιστρόφως

Αν $\alpha\cdot\beta > O$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ και αντιστρόφως

1.2 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός και ν θετικός ακέραιος με $\nu > 1$. Τότε η δύναμη α^ν ορίζεται ως το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α. Δηλαδή: $\alpha^\nu = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha$

Το α το λέμε βάση της δύναμης και το ν εκθέτη.



Ορίζουμε ακόμα ότι:

$\alpha^\circ = 1$ με $\alpha \neq 0$, $\alpha^1 = \alpha$ και $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, $\alpha \neq 0$

Δεν ορίζεται η δύναμη με βάση το μηδέν και εκθέτη μηδέν ή αρνητικό ακέραιο. Τους πολύ μεγάλους ή τους πολύ μικρούς κατ' απόλυτη τιμή αριθμούς, τους γράφουμε με τη τυποποιημένη μορφή, δηλαδή με τη μορφή:

$\alpha\cdot 10^\nu$ με 1 $|\alpha| < 10$ και ν ακέραιο.

Η περιττή δύναμη ενός αρνητικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός.

Η άρτια δύναμη ενός αρνητικού αριθμού είναι θετικός αριθμός.

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακεραίους αριθμούς,

ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

Ιδιότητες

$$\boldsymbol{\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\nu+\kappa}}$$

$$\boldsymbol{\alpha^{\kappa} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\kappa-\nu}}$$

$$\boldsymbol{\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha\beta)^{\nu}}$$

$$\boldsymbol{(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\mu\nu}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{\alpha^{-\nu}}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}}$$

Ισότητα δυνάμεων

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,ν,μ με $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq \pm 1$,ισχύει η συνεπαγωγή: $\boldsymbol{\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu} \Longrightarrow \nu = \mu}$

1.3 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α είναι ο θετικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α.

Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επομένως: Αν $\sqrt{\alpha} = \chi$, τότε $\chi^2 = \alpha$, με $\alpha, \chi \geq 0$.

Αν α > 0, τότε ισχύει $(\sqrt{\alpha})^2 = |\alpha|$

Ορίζουμε ότι $\sqrt{0} = 0$

Για μη αρνητικούς αριθμούς α,β ισχύει: $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

Αν α > 0 και β > 0. ισχύει: $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

1.4 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ισούται με την απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό α από το 0.

Π.χ. $|-5| = -(-5) = +5 = 5$.

$|+5| = 5$.

$|0| = 0$.